ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ,1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2014

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν ***ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΣΤΑΘΕΡΟ και ΚΙΝΗΤΟ ΤΗΛΕΦΩΝΟ,*** τα οποία θα **ελεγχθούν σε αντιπαραβολή με την ταυτότητα** που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει **διανομή φωτοτυπιών** των θεμάτων στους μαθητές.
3. **Να φωτοτυπηθεί και να μοιραστεί σε όλους τους μαθητές η επιστολή που σας αποστέλλουμε μαζί με τα θέματα.**
4. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). **Δε θα επιτρέπεται** σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει **μια ώρα** από **την έναρξη της εξέτασης**.
5. Οι επιτηρητές των αιθουσών **έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν** τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν **χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα**, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτεύεται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
6. **Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται**.
7. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα, αφού πρώτα στα παραρτήματα , εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.**
8. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε.
9. **Ο «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ»** θα διενεργηθεί στις **17 Ιανουαρίου 2015** και η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών **«ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»** θα γίνει στις **28 Φεβρουαρίου 2015** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό προκριματικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. που θα γίνει **στις 4 Απριλίου 2015** θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στην **32^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ελλάδα, Μάιος 2015)**, στην **19^{η} Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Σερβία, Ιούνιος 2015)** και στην **56^{η} Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ταϊλάνδη, Ιούλιος 2015).**
10. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν με την εθελοντική τους συμμετοχή στην επιτυχία των Πανελλήνιων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.
11. **Παρακαλούμε τον Πρόεδρο της ΤΝΕ να αναπαράγει με τα ονόματα των επιτηρητών την ευχαριστήρια επιστολή του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και να την παραδώσει στους επιτηρητές.**

Για το Διοικητικό Συμβούλιο
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος
Γεώργιος Δημάκος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Ο Γενικός Γραμματέας
Εμμανουήλ Κρητικός
Επίκουρος Καθηγητής
Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Πρόλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση των διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

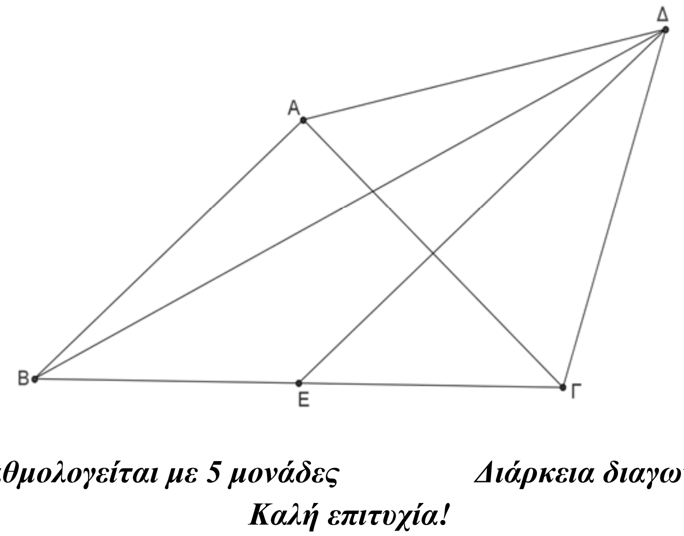
$$\frac{1003}{2015},\frac{1007}{2019},\frac{1009}{2021},\frac{997}{2009},\frac{1011}{2023},\frac{999}{2011},\frac{1001}{2013},\frac{1005}{2017}.$$

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{\mathrm{A}}=90^\circ$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{E}$.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\dfrac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\dfrac{6}{13}$, αν $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\dfrac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\dfrac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Delta$. Αν $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Delta$ και του τετραπλεύρου $\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)}{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})}$.

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta(\Delta_1)$ και $\beta(\Delta_2)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\dfrac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)}=\dfrac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.
Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75$^{\text{ος}}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}$$

.

Πρόβλημα 2
Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

Πρόβλημα 3
Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(x^2+y^2+xy\right)^2 \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right],$$

όπου x,y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x,y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{\mathrm{B}}$ είναι ρητός, για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x,y.

Πρόβλημα 4
Θεωρούμε τετράπλευρο $ABCD$ με τη γωνία $\hat{A}=100^o$ και $\hat{D}=40^o$. Αν DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB=DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$\mathrm{A}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}.$$

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x,y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2-10xy+13y^2+2|x-y|=5$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $\mathrm{AB}<\mathrm{AC}<\mathrm{BC}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C, αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). Ο κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K. Ο κύκλος (c_2) (με κέντρο Α και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του Α) στο σημείο L. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται επάνω στο κύκλο (c).

Πρόβλημα 4
Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\begin{Bmatrix} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{Bmatrix}$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Η διχοτόμος $\mathrm{B\Delta}$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $C(O,R)$, στο σημείο Z. Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο H. Οι ευθείες $\mathrm{A\Gamma}$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ. Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $\mathrm{B\Delta H\Theta}$, $\mathrm{B\Delta EK}$ και $\mathrm{\Delta Z\Theta K}$ είναι εγγράψιμα.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n, που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***